



گزینه ۱

۱

چون نقطه M روی بیضی قرار گرفته است، پس طبق تعریف بیضی، مجموع فاصله‌های آن از دو نقطه کانون برابر قطر بزرگ بیضی می‌باشد؛ پس $|MF| + |MF'| = 2a$. از طرفی نقطه M' هم همین شرایط را دارد. یعنی $|M'F| + |M'F'| = 2a$ پس محیط چهار ضلعی برابر $4a$ می‌شود.

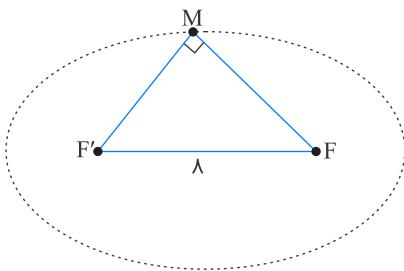
$$a = 1 \Rightarrow 4a = 4$$

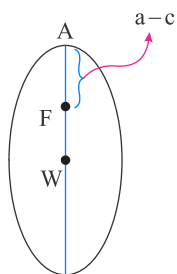
گزینه ۱

۲

$$MF + MF' = 10 \xrightarrow{\text{توان}} MF^2 + MF'^2 + 2MF \cdot MF' = 100$$

$$MF^2 + MF'^2 = 64 \Rightarrow 64 + 2MF \cdot MF' = 100 \Rightarrow MF \cdot MF' = 18$$

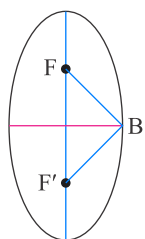




$$e = \frac{r}{r'} = \frac{c}{a} \Rightarrow ra = r'c$$

$$a - c = |FA| = |r - r'| = r'$$

$$\begin{cases} ra = r'c \\ a - c = r' \end{cases} \xrightarrow{\times r} ra - rc = r'r' \xrightarrow{ra=r'c} r'c - rc = r'r' \Rightarrow c = r'$$

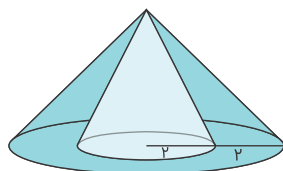


$$c = r' \Rightarrow ra = r' \times r' \Rightarrow a = 9$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 81 - 36 = 45 \Rightarrow b = \sqrt{45}$$

بیشترین مساحت برابر است با:

$$S(\triangle FBF') = \frac{1}{2} \times b \times 2c = b \times c = \sqrt{45} \times 6 = 18\sqrt{5}$$

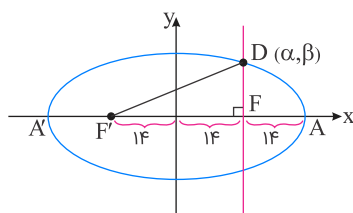


حجم جسم تفاضل بین دو مخروط ساخته شده است که ارتفاع هر دو برابر با ۴ و شعاع قاعده آن‌ها ۲ و ۴ است.

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \pi r_1^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 4 = \frac{16\pi}{3}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \times \pi r_2^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 4 = \frac{64\pi}{3}$$

$$V_2 - V_1 = \frac{64\pi}{3} - \frac{16\pi}{3} = 16\pi$$



راه حل اول: اگر $DF = \beta$ و $DF' = \gamma$ فرض شود آنگاه طبق تعریف بیضی $\beta + \gamma = 16$ و در مثلث $FF'D$ داریم:

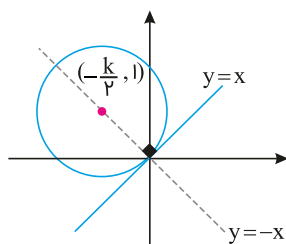
$$\gamma^2 - \beta^2 = 64 \Rightarrow (\gamma - \beta)(\gamma + \beta) = 64 \xrightarrow{\beta + \gamma = 16} \gamma - \beta = 4$$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 16 \\ \gamma - \beta = 4 \end{cases} \xrightarrow{+} 2\gamma = 20 \Rightarrow \gamma = 10, \beta = 6$$

پس: $D(4, 6)$

راه حل دوم: باتوجه به مفروضات سؤال نتیجه می‌شود که $a = 8$, $c = 4$, پس $b = 4\sqrt{3}$. طول وتر کانونی

برابر ۱۲ است، پس $D(4, 6)$. $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 48}{8} = 12$



$$x^2 + y^2 + kx - 2y = 0 \Rightarrow \text{مرکز} = \left(-\frac{k}{2}, 1\right)$$

چون دایره در مبدأ مختصات بر خط $y = x$ مماس است، پس مرکز آن باید روی خط $y = -x$ قرار داشته باشد.

$$y = -x \xrightarrow{\left(-\frac{k}{2}, 1\right)} 1 = -\left(-\frac{k}{2}\right) \Rightarrow k = 2$$

$$\text{شعاع} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

در شکل (۱)، BC قطر وجه و AB ضلع عمود بر آن است. پس $AB \perp BC$ و این هم یعنی مثلث ABC قائم‌الزاویه است و داریم:

$$\text{قطر وجه در مکعب} : BC = \sqrt{a^2 + a^2} \xrightarrow{a=2} BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{AB=2} S = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

و در شکل (۲) سطح مقطع، مستطیلی است که یک ضلعش قطر وجه مکعب است و دیگری ضلع مکعب.

$$\text{قطر وجه مکعب} = a\sqrt{2} \Rightarrow S = a\sqrt{2} \times a = a^2\sqrt{2} \xrightarrow{a=2} 4\sqrt{2}$$

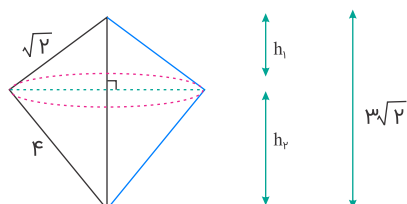
$$\text{نسبت خواسته شده} : \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

طول وتر مثلث را به دست می‌آوریم:

$$\text{طول وتر} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 4^2} = 3\sqrt{2}$$

شکل حاصل دو مخروط با قاعده‌های یکسان است و شعاع قاعده‌ها، همان ارتفاع وارد بر وتر است:

$$h = \frac{\sqrt{2} \times 4}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3} \Rightarrow r = \frac{4}{3}$$

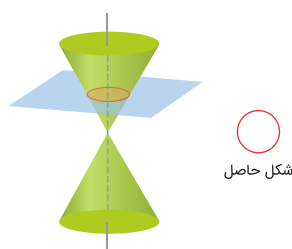


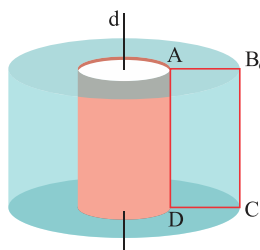
$$\text{حجم مخروط بالایی} : V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 = \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times h_1 = \frac{16\pi}{27} h_1$$

$$\text{حجم مخروط پایینی} : V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times h_2 = \frac{16\pi}{27} h_2$$

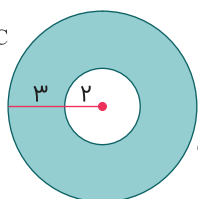
$$V_{\text{کل}} = V_1 + V_2 = \frac{16\pi}{27} \underbrace{(h_1 + h_2)}_{3\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{9}\pi$$

مقطع حاصل یک دایره خواهد بود.





شکل حاصل در اثر این دوران یک استوانه است که استوانه‌ای از آن جدا شده است. پس صفحه‌های B عمود بر خط d، سطح مقطع زیر را از شکل جدا می‌کند:



بنابراین مساحت جدا شده برابر است با:

$$\pi(5)^2 - \pi(2)^2 = 25\pi - 4\pi = 21\pi$$

سطح مقطع صفحه شامل خط d، دو برابر مساحت مستطیل ABCD است،

یعنی $36 = 2(3 \times 6)$. پس خواسته سؤال برابر است با: $\frac{36}{21\pi} = \frac{12}{7\pi}$.

$$(x - ۲)^۲ + (y + ۳)^۲ = ۴ \Rightarrow O(۲, -۳), R = \sqrt{۴} = ۲$$

$$x^۲ + y^۲ - ax = ۵ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ax - ۵ = ۰$$

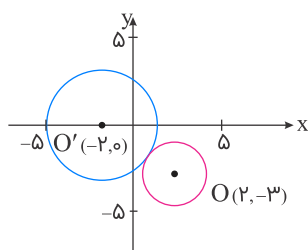
$$O'(\frac{a}{۲}, ۰), R' = \frac{1}{۲}\sqrt{a^۲ + ۲۰}$$

برای اینکه این دو دایره نسبت به هم مماس بیرون باشد، لازم است:

$$OO' = R + R'$$

ابتدا OO' را به دست می‌آوریم:

$$OO' = \sqrt{(۲ - \frac{a}{۲})^۲ + (-۳)^۲} = \sqrt{\frac{a^۲}{۴} - ۲a + ۱۳}$$



در نهایت مقادیر را در رابطه $OO' = R + R'$ جایگذاری می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{a^۲}{۴} - ۲a + ۱۳} = ۲ + \frac{1}{۲}\sqrt{a^۲ + ۲۰}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} \frac{a^۲}{۴} - ۲a + ۱۳ &= ۴ + ۲\sqrt{a^۲ + ۲۰} + \frac{1}{۴}(a^۲ + ۲۰) \\ \Rightarrow ۴ - ۲a &= ۲\sqrt{a^۲ + ۲۰} \Rightarrow ۲ - a = \sqrt{a^۲ + ۲۰} \end{aligned}$$

مجدداً طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} (۲ - a)^۲ &= a^۲ + ۲۰ \\ \Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ &= a^۲ + ۲۰ \\ -۴a &= ۱۶ \Rightarrow a = -۴ \end{aligned}$$

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 9 \Rightarrow O'(-3, -1), R' = 3$$

از آنجا که دو دایره مماس خارجاند، پس $d = OO' = R + R'$ است؛ در نتیجه داریم:

$$OO' = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$d = R + R' \Rightarrow 5 = R + 3 \Rightarrow R = 2$$

$$\Rightarrow \text{معادله دایره: } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

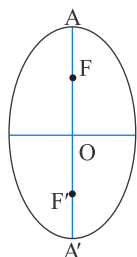
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

فاصله کانون‌ها برابر با $2c$ است.

$$2c = |8 - 0| \Rightarrow c = 4, \quad 2b = 4\sqrt{5} \Rightarrow b = 2\sqrt{5}$$

$$a^2 = c^2 + b^2 = 16 + 20 = 36 \Rightarrow a = 6$$

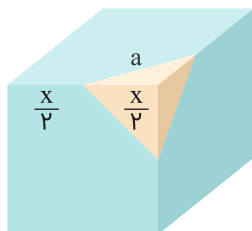
مرکز بیضی $O(\alpha, \beta)$ وسط FF' است.



$$O = \frac{F + F'}{2} = (2, 4)$$

$$\begin{cases} A(\alpha, \beta + a) \\ A'(\alpha, \beta - a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2, 4 + 6) \\ A'(2, 4 - 6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2, 10) \\ A'(2, -2) \end{cases}$$

چون صفحه برش هر سه ضلع را دقیقاً از وسط قطع می‌کند و باتوجه به مکعب بودن شکل، مثلث حاصل متساوی‌الاضلاع خواهد بود که اندازه اضلاع آن برابر خواهد بود با:



$$a = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

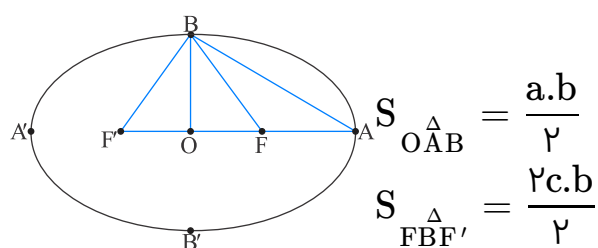
و می‌دانیم که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع برابر است با:

$$a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \xrightarrow{a = \frac{x}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{x^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} x^2$$

و می‌دانیم مساحت کل مکعب به ضلع x برابر است با: $6x^2$
پس نسبت مساحت قطاع به مساحت کل برابر است با:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{8} x^2}{6x^2} = \frac{\sqrt{3}}{48}$$

کافی است از روی شکل، رابطه داده شده را بسازیم:



$$\Rightarrow \frac{a.b}{2} = 3 \times \frac{2c.b}{2} \Rightarrow a = 6c \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{6} \Rightarrow e = \frac{1}{6}$$

مرکز دایره اولیه را می‌یابیم:

$$x^2 + y^2 - 2x + \frac{c}{3} = 0$$

$$O(1, 0) \xrightarrow[\text{یک واحد به بالا}]{\text{دو واحد به چپ}} O'(-1, 1)$$

پس مرکز دایره جدید $(-1, 1)$ است.

$$\frac{-a}{2} = -1 \Rightarrow a = 2, \quad \frac{-b}{2} = 1 \Rightarrow b = -2$$

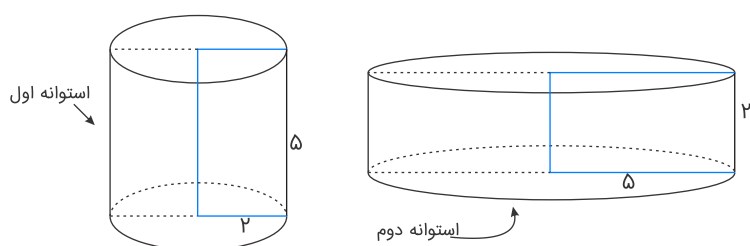
$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 - 4} = 1$$

می‌دانیم شعاع دایره تغییر نمی‌کند. شعاع دایره اولیه نیز ۱ است.

$$1 = \frac{1}{2} \sqrt{4 - \frac{4c}{3}} \Rightarrow c = 0$$

$$a + b + c = -2 + 2 + 0 = 0$$

مطابق شکل، باید اختلاف حجم‌های دو استوانه را بیابیم:



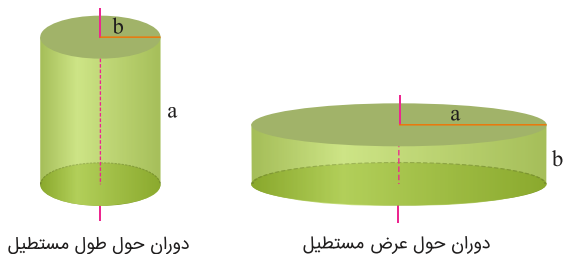
(حجم استوانه اول) - (حجم استوانه دوم) = اختلاف حجم دو استوانه

$$= \pi(5^2)(2) - \pi(2^2)(5) = 50\pi - 20\pi = 30\pi$$

طول مستطیل را a و عرض آن را b در نظر می‌گیریم:

$$\text{طول قطر} = \sqrt{a^2 + b^2} = 3\sqrt{10} \Rightarrow a^2 + b^2 = 90 \quad (1)$$

حجم استوانه حاصل حول b برابر با $\pi a^2 b$ و حول a برابر با $\pi b^2 a$ است؛ بنابراین داریم:



دوران حول طول مستطیل

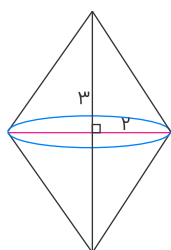
دوران حول عرض مستطیل

$$\frac{\pi a^2 b}{\pi b^2 a} = 3 \Rightarrow \frac{a}{b} = 3 \Rightarrow a = 3b$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در (۱)}} 9b^2 + b^2 = 90 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \xrightarrow{a=3b} a = 9$$

$$\text{محیط مستطیل} = 2(a + b) = 2(9 + 3) = 24$$

از دوران لوزی حول قطر بزرگ آن، دو مخروط یکسان که از قاعده به هم چسبیده‌اند، ایجاد می‌شود. شعاع قاعده مخروط‌ها، برابر نصف طول قطر کوچک لوزی و ارتفاع مخروط‌ها، برابر نصف طول قطر بزرگ لوزی است. بنابراین خواهیم داشت:



$$\text{حجم شکل حاصل} : V = 2 \times \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= 2 \times \frac{1}{3} \pi (2)^2 \times 3 = 8\pi$$

مختصات مرکز این دایره $O(\beta + ۱, ۲\beta)$ است، پس فاصله O تا نقاط A و B برابر است:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(۲\beta - ۵)^2 + (\beta + ۳)^2} = \sqrt{(۲\beta + ۲)^2 + (\beta - ۴)^2}$$

$$۴\beta^2 - ۲۰\beta + ۲۵ + \beta^2 + ۶\beta + ۹ = ۴\beta^2 + ۸\beta + ۴ + \beta^2 - ۸\beta + ۱۶ \Rightarrow ۱۴ = ۱۴\beta \Rightarrow \beta = ۱$$

$$\Rightarrow R = OA = \sqrt{۳^2 + ۴^2} = ۵$$